ریاضی مهندسی:

شرط ۱: f تعریف شده باشد، تکه‌ای پیوسته باشد، متناوب باشد؟

سری فوریه:

$L > 0$

$$1, \cos\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \sin\frac{2\pi x}{L}$$

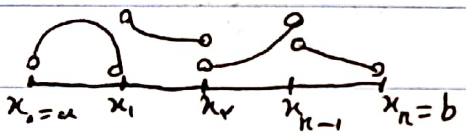
نوشتن تابع برحسب دنباله بالا را سری فوریه می‌گویند.

تابع تکه‌ای پیوسته:

(تکه‌تکه کردن بازه)

تابع $f(x)$ را در بازه $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته نامند در صورتی که افرازی

از آن مانند
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$



موجود باشد به طوری که:

۱) $f(x)$ در (x_{i-1}, x_i) پیوسته باشد.

۲) $f(x_i^-)$ و $f(x_{i-1}^+)$ موجود و متناهی باشند.

قضیه: اگر $f(x)$ و $f'(x)$ در $[-L, L]$ تکه‌ای پیوسته باشند و $f(x)$ دارای دوره تناوب $2L$ باشد.

$$f(x+2L) = f(x)$$

در این صورت به ازای هر x حقیقی داریم:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

ALMA

Scanned by CamScanner

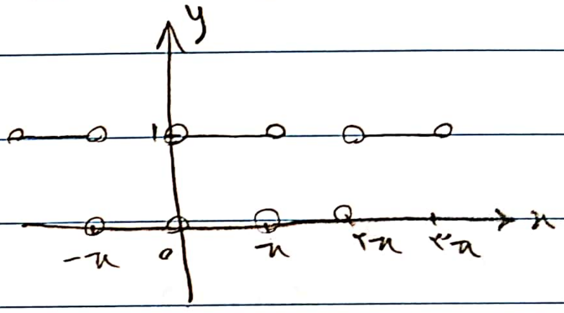
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ $\qquad\qquad$ $n = 1, 2, 3, \dots$

★ در نقاط پیوسته $\quad f(x^+) = f(x^-) = f(x)$

مثال: سری فوریه موج مربعی را بیابید:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x < 0 \\ 1 & , 0 < x < \pi \end{cases}$$



$f(x + 2\pi) = f(x)$

$L = \pi$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{n\pi}[\sin nx]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}(\sin n\pi - \sin n\times 0) = 0$$

$\boxed{a_n = 0}$, $n \neq 0$

چون در فرمول بالا در مخرج $\frac{1}{n\pi}$ ، n داریم پس a_0 را نمی‌توان از این فرمول بدست آورد پس برمی‌گردیم و از فرمول اول a_n ، a_0 را بدست می‌آوریم.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[x]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi - 0) = \frac{1}{\pi}\times\pi = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}$$

$(-1)^n$

* چون $n\pi$ ها باشد $\cos\pi$ می‌شود ۱- و $\cos 2\pi$ می‌شود ۱ و $\cos 3\pi$ می‌شود ۱- در این صورت می‌توان نوشت

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \left[\frac{-\cos nx}{n\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{-\cos n\pi + 1}{n\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

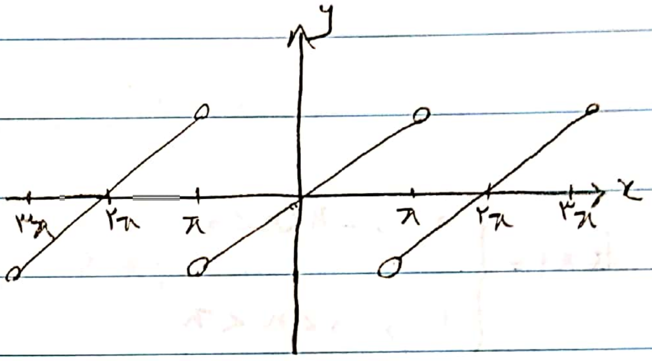
$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin nx$$

جواب

مثال: سری فوریه موج دندان اره‌ای زیر را بنویسید:

$$f(x) = x \quad , \quad -\pi < x < \pi$$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$



$$L = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

x	+	$\cos nx$
1	-	$\frac{1}{n}\sin nx$
0		$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi + \frac{1}{n^2}\cos n\pi\right) - \left(\frac{-\pi}{n}\sin n(-\pi) + \frac{1}{n^2}\cos n(-\pi)\right)\right)$$

(در بالای جمله‌ها: $\sin n\pi = 0$ و $\frac{1}{n^2}\cos n\pi = \frac{(-1)^n}{n^2}$)

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{n^2} \quad , n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0 \qquad a_0 = 0$$

Scanned by CamScanner

x	$\sin nx$
1	$+\ -\frac{1}{n}\cos nx$
0	$-\ -\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{f(x)}^{x} \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(\overbrace{\frac{-\pi}{n}\cos n\pi}^{-\frac{\pi}{n}(-1)^n} + \frac{1}{n^2}\overset{0}{\sin n\pi} \right) - \left(\overbrace{\frac{\pi}{n}\cos n(-\pi)}^{-\frac{\pi}{n}(-1)^n} + \frac{1}{n^2}\overset{0}{\sin n(-\pi)} \right) \right)$$

$$b_n = 0$$

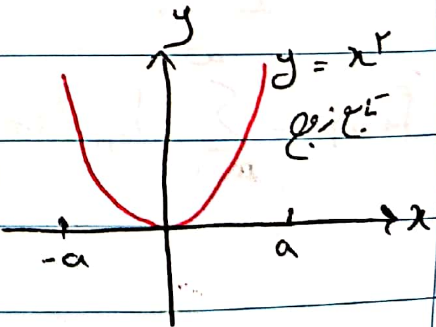
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx$$ جواب.

ری
حالتهای خاص:

۱- اگر تابع $f(x)$ زوج باشد $f(x) = f(-x)$

یادآوری: اگر تابع $\phi(x)$ زوج باشد

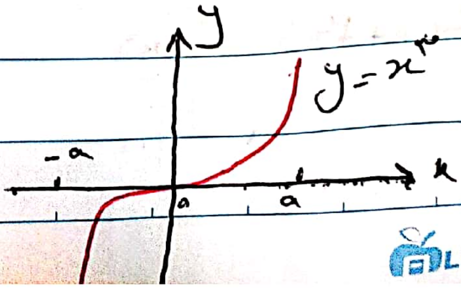
$$\int_{-a}^{a} \phi(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} \phi(x)\,dx$$



$$\phi(x) = \phi(-x)$$

- اگر $\phi(x)$ فرد باشد $\phi(-x) = -\phi(x)$

$$\int_{-a}^{a} \phi(x)\,dx = 0$$



Scanned by CamScanner

① اگر $f(x)$ زوج باشد $\quad f(x)=f(-x)$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underset{\text{زوج}}{f(x)}\,\underset{\text{زوج}}{\cos\frac{n\pi x}{L}}\,dx$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underset{\text{زوج}}{f(x)}\,\underset{\text{فرد}}{\sin\frac{n\pi x}{L}}\,dx$$

$$\Rightarrow b_n=0$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$$ سری فوریه کسینوسی

② اگر $f(x)$ فرد باشد.

$$a_n=0$$

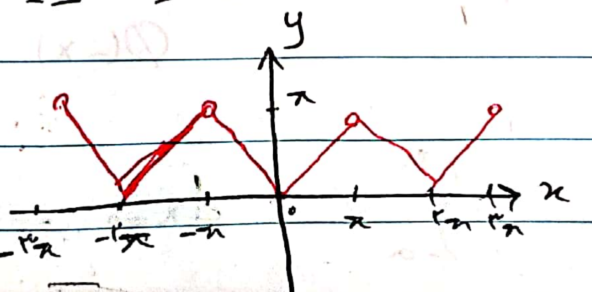
$$b_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$ سری فوریه سینوسی

مثال: سری فوریه زیر را بنویسید.

$f(x)=|x| \qquad -\pi<x<\pi$

$f(x+2\pi)=f(x)$



$L=\pi \quad , \quad b_n=0$ تابع زوج است.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

x	$\cos nx$
1	$+\ \frac{\sin nx}{n}$
0	$-\ -\frac{\cos nx}{n^2}$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos n\pi}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right\}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n-1}{n^2}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[x^2\right]_0^{\pi}=\pi$$

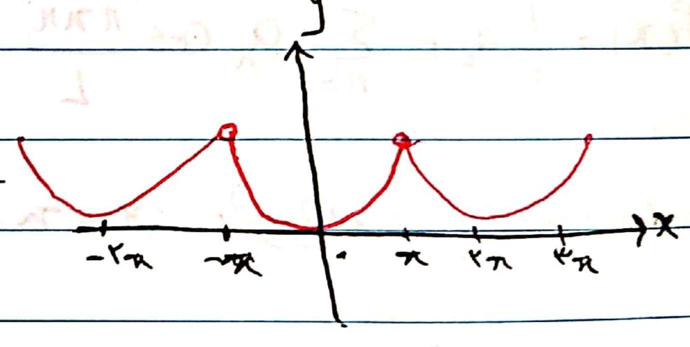
$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$$ جواب.

مثال: سری فوریه تابع زیر را بیابید:

$f(x)=x^2 \quad , \quad -\pi<x<\pi$

$f(x+2\pi)=f(x)$

$L=\pi \quad , \quad b_n=0$ تابع زوج



$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx$$

x^2	$\cos nx$
$2x$	$+\ \frac{\sin nx}{n}$
2	$-\ -\frac{\cos nx}{n^2}$
0	$+\ -\frac{\sin nx}{n^3}$

$$=\frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}+2x\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{2\pi\frac{\cos n\pi}{n^2}\right\}=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Scanned by CamScanner

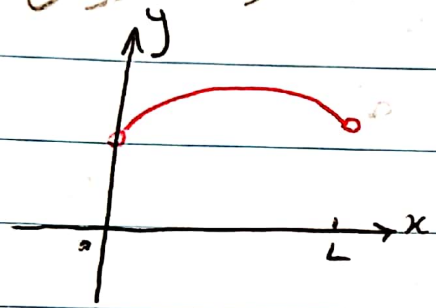
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

سری فوریه نیم دامنه‌ای:

$$f : [0, L] \to (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

چون نیم دامنه‌ای می‌باشد هم می‌توان فوریه سینوسی و هم می‌توان کسینوسی را پیدا کرد.



سری فوریه سینوسی نیم دامنه‌ای:

$0 < x < L$

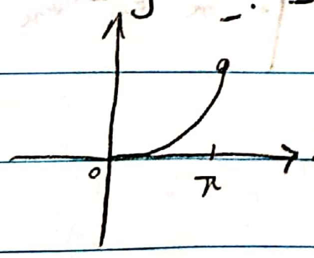
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

سری فوریه کسینوسی نیم دامنه‌ای:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

مثال: بسط نیم دامنه‌ای $f(x) = x^2$, $0 < x < \pi$ را بیابید:

الف) کسینوسی



$L = \pi \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$

x^2	$\cos nx$
$2x$	$\frac{\sin nx}{n}$
2	$-\frac{\cos nx}{n^2}$
0	$-\frac{\sin nx}{n^3}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - \left(2x\frac{\cos nx}{n^2}\right) - \left(2\frac{\sin nx}{n^3}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(2\pi\frac{\cos n\pi}{n^2}\right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Scanned by CamScanner

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{0}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

ب) سینوسی

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin nx\,dx$$

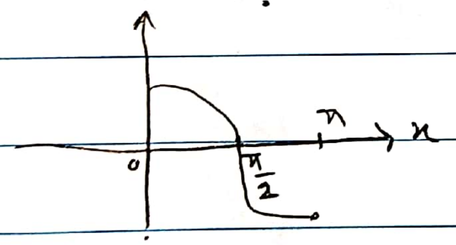
x^2	$+\ \sin nx$
$2x$	$-\ \frac{\cos nx}{n}$
2	$-\ \frac{\sin nx}{n^2}$
0	$+\ \frac{\cos nx}{n^3}$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\left(-x^2\cdot\frac{\cos nx}{n}\right) + \left(2x\frac{\sin nx}{n^2}\right) + \left(2\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left(-\pi^2\frac{\cos n\pi}{n}\right) + 2\frac{\cos n\pi}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2(-1)^n}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2 n^2(-1)^{n+1} + 2(-1)^n - 2}{n^3}\right)\sin nx$$

سوال: سری فوریه سینوسی $f(x)=\cos x$ ، $0<x<\pi$ را بیابید.



یادآوری:

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

$\sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

$\cos m\pi = (-1)^m$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin(nx+x) + \sin(nx-x))\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin(n+1)x + \sin(n-1)x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)} - \frac{\cos(n-1)x}{(n-1)}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{1}{n-1}\right)$$

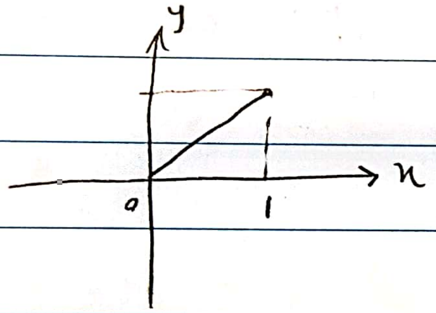
$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n-1}+\frac{2n}{n^2-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n-1}+\frac{2n}{n^2-1}\right)=\frac{1}{\pi}\left((-1)^n\left(\frac{2n}{n^2-1}\right)+\frac{2n}{n^2-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{2n\left((-1)^n+1\right)}{n^2-1}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\,\frac{(2n)\left((-1)^n+1\right)}{n^2-1}\right)\sin nx$$

مثال: سری فوریه سینوسی نیم دامنه‌ای $f(x)=x \quad , \quad 0<x<1$



$L=1$

$$b_n=2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx$$

x	$+\ \sin n\pi x$
1	$-\ \frac{\cos n\pi x}{n\pi}$
0	$-\ \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}$

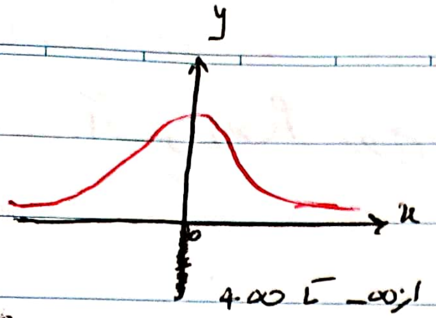
$$b_n=2\left[\left(-x\cdot\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)+\left(\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\right]_0^1$$

$$=2\left(-\frac{\cos n\pi}{n\pi}\right)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$$

Scanned by CamScanner

انتگرال فوریه:



مقدمه: فرض کنید $f(-\infty,\infty) \to (-\infty,\infty)$ ، تابع f از $-\infty$ تا $+\infty$ تعریف شده است. $f(x)$ و $f'(x)$ تکه‌ای پیوسته باشند به علاوه $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ (مساحت زیر منحنی)

در این صورت به ازای هر x حقیقی داریم

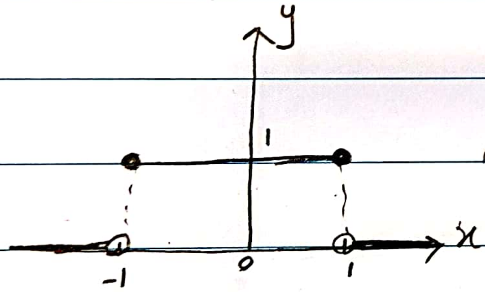
$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

(حد راست ، حد چپ)

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos\omega v\,dv \quad , \quad B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\omega v\,dv$$

مثال: تابع تک پالس مطلوبست انتگرال فوریه

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,|x|\le 1\\ 0 & ,|x|>1\end{cases}$$



$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=\int_{-\infty}^{-1}f(x)\cos\omega x\,dx+\int_{-1}^{1}f(x)\cos\omega x\,dx+\int_{1}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

(نسبت به y متقارن است چون زوج است ، برای اینکه cos زوج باشد)

$$A(\omega)=\int_{-1}^{1}\cos\omega x\,dx=2\int_0^1\cos\omega x\,dx=2\left[\frac{\sin\omega x}{\omega}\right]_0^1=2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

(زوج)

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx=0$$

(زوج ، فرد)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty 2\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega$$

Scanned by CamScanner

حالت های خاص:

الف) اگر $f(x)$ زوج باشد: $f(-x) = f(x)$

انتگرال فوریه کسینوسی

$B(\omega) = 0$

$$A(\omega) = 2\int_0^\infty f(x)\cos \omega x \, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\cos \omega x \, d\omega$$

ب) اگر $f(x)$ فرد باشد: $f(-x) = -f(x)$

انتگرال فوریه سینوسی

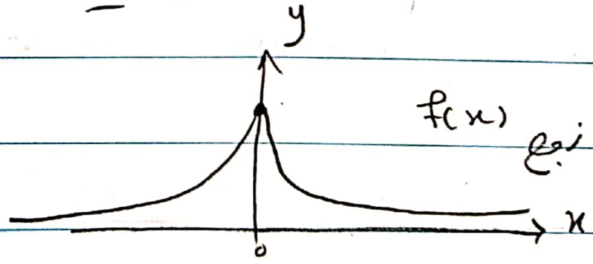
$A(\omega) = 0$

$$B(\omega) = 2\int_0^\infty f(x)\sin \omega x \, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(\omega)\sin \omega x \, d\omega$$

مثال: انتگرال فوریه تابع زیر را بیابید:

$$f(x) = e^{-4|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$



$B(\omega) = 0$

قدرمطلق را برمی‌داریم چون بازه ۰ تا ∞ را داریم مثبت باشیم.

$$A(\omega) = 2\int_0^\infty f(x)\cos \omega x \, dx = 2\int_0^\infty e^{-4x}\cos \omega x \, dx$$

یادآوری

هر وقت تابع‌هایی با تابع نمایی داشتیم از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم:

$$\mathcal{L} f(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

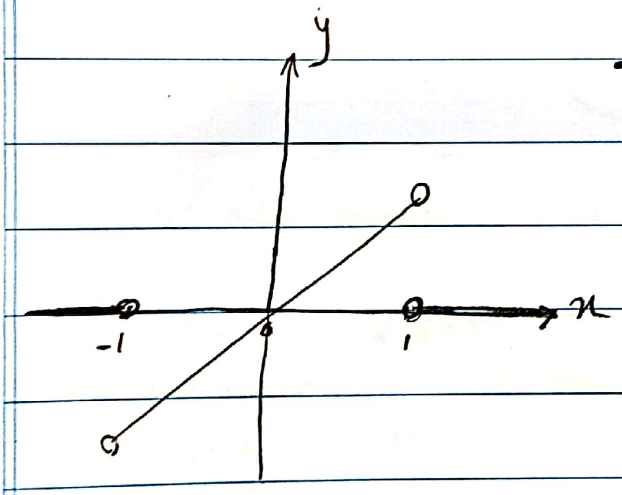
$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2} \quad , \quad \mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$A(\omega) = 2\,\frac{4}{4^2+\omega^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{8}{16+\omega^2}\cos\omega x\, d\omega$$

$$\Rightarrow e^{-4|x|} = \frac{8}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{16+\omega^2}\, d\omega$$

مثال: انتگرال فوریه $f(x) = \begin{cases} x, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$ را بنویسید.



$f(x)$ فرد است.

$A(\omega) = 0$

$$B(\omega) = 2\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\, dx = 2\int_0^1 x\sin\omega x\, dx \;\left(+\, 2\int_1^\infty f(x)\sin\omega x\, dx = 0\right)$$

$$= 2\left[\left(-x\,\frac{\cos\omega x}{\omega}\right) + \frac{\sin\omega x}{\omega^2}\right]_0^1 = 2\left(-\frac{\cos\omega}{\omega} + \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{-\omega\cos\omega + \sin\omega}{\omega^2}\right)$$

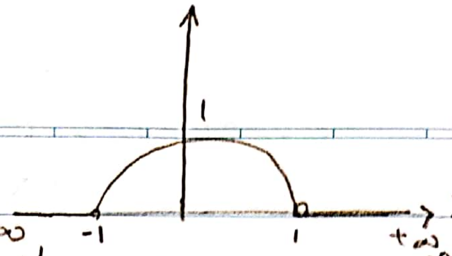
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^2}\sin\omega x\, d\omega$$

انتگرال فوریه سینوسی

تمرین ۱:

تابع ... زوج است پس $B(\omega)=0$ می‌شود.

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$



$$A(\omega)=2\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx=2\int_0^1(1-x^2)\cos\omega x+2\int_1^\infty 0\cdot\cos\omega x\,dx=$$

$1-x^2$ +	$\cos\omega x$
$-2x$ −	$\frac{\sin\omega x}{\omega}$
-2 +	$-\frac{\cos\omega x}{\omega^2}$
0	$-\frac{\sin\omega x}{\omega^3}$

$$=2\left[(1-x^2)\left(\frac{\sin\omega x}{\omega}\right)-(2x)\left(\frac{\cos\omega x}{\omega^2}\right)+2\,\frac{\sin\omega x}{\omega^3}\right]_0^1$$

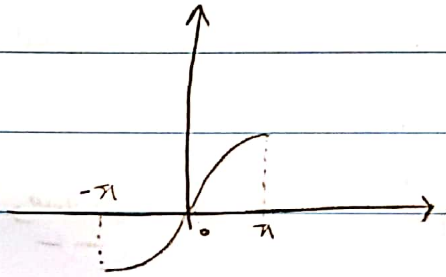
$$=2\left(-2\,\frac{\cos\omega}{\omega^2}+2\,\frac{\sin\omega}{\omega^3}\right)=4\left(\frac{-\omega\cos\omega+\sin\omega}{\omega^3}\right)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}\right)\cos\omega x\,d\omega$$

تمرین ۲:

تابع فرد است.

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|<\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$$



$$B(\omega)=2\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx=2\int_0^\pi\sin x\sin\omega x\,dx+2\int_\pi^\infty 0\cdot\sin\omega x\,dx$$

$$=2\int_0^\pi\sin x\sin\omega x\,dx$$

یادآوری: $\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$

یادآوری: $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

$$B(\omega)=2\int_0^\pi\frac{1}{2}\left(\cos(1-\omega)x-\cos(1+\omega)x\right)dx$$

$$=\left[\frac{\sin(1-\omega)x}{1-\omega}-\frac{\sin(1+\omega)x}{1+\omega}\right]_0^\pi=\frac{\sin(\pi-\pi\omega)}{1-\omega}-\frac{\sin(\pi+\pi\omega)}{1+\omega}$$

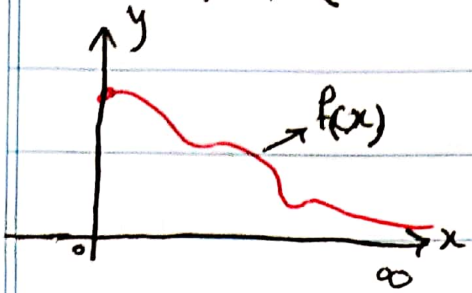
$$B(\omega)=\frac{\sin\pi\omega}{1-\omega}-\frac{\sin\pi\omega}{1+\omega}=\sin\omega\pi\,\frac{2\omega}{1-\omega^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\sin\pi\omega\,\frac{2\omega}{1-\omega^2}\right)\sin\omega x\,dx$$

Scanned by CamScanner

انتگرال فوریه نیم دامنه‌ای:

$f: [0,\infty) \to (-\infty,\infty)$



این تابع را هم می‌توان زوج در نظر گرفت هم فرد.

انتگرال فوریه کسینوسی:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x \, d\omega$$

$$A(\omega) = 2\int_0^\infty f(v)\cos\omega v \, dv$$

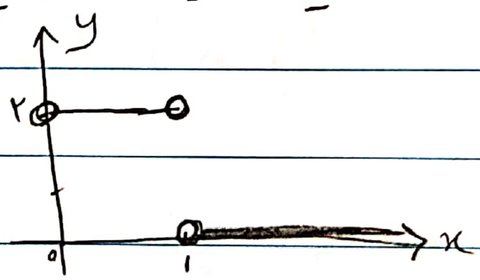
انتگرال فوریه سینوسی:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x \, d\omega$$

$$B(\omega) = 2\int_0^\infty f(v)\sin\omega v \, dv$$

مثال: انتگرال فوریه سینوسی را بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0<x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$



$$B(\omega) = 2\int_0^1 2\sin\omega x \, dx + 2\int_1^\infty 0 \sin\omega x \, dx = 4\int_0^1 2\sin\omega x \, dx$$

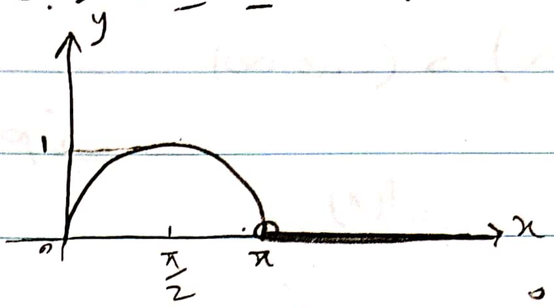
$$= 4\left[-\frac{\cos\omega x}{\omega}\right]_0^1 = 4\left(-\frac{\cos\omega}{\omega} + \frac{1}{\omega}\right) = 4\left(\frac{-\cos\omega + 1}{\omega}\right)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega x \, d\omega$$

Scanned by CamScanner

مثال: انتگرال فوریه سینوسی را بنویسید:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi\end{cases}$$



$$B(\omega)=2\int_0^\infty f(v)\sin\omega v\,dv=2\int_0^\pi \sin x\sin\omega x\,dx+2\int_\pi^\infty 0\,\sin\omega x\,dx$$

$$=2\int_0^\pi \sin x\sin\omega x\,dx$$

یادآوری:

$$\begin{cases}\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \\ \sin a\sin b=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)+\cos(a+b)\right)\end{cases}$$

$$=2\int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\cos(1-\omega)x+\cos(1+\omega)x\right)dx$$

$$=\left[\left(\frac{\sin(1-\omega)x}{1-\omega}+\frac{\sin(1+\omega)x}{1+\omega}\right)\right]_0^\pi$$

$$B(\omega)=\frac{\sin(1-\omega)\pi}{1-\omega}+\frac{\sin(1+\omega)\pi}{1+\omega}=\frac{\sin(\pi-\pi\omega)}{1-\omega}+\frac{\sin(\pi+\pi\omega)}{1+\omega}$$

$$B(\omega)=\frac{\sin\pi\omega}{1-\omega}-\frac{\sin\pi\omega}{1+\omega}$$

یادآوری:

$$\begin{cases}\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \\ \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\end{cases}$$

چون ω عدد حقیقی است پس $\sin\pi$ ⇐ صفر نمی‌شود.

$$B(\omega)=\sin\pi\omega\,\frac{2\omega}{1-\omega^2}=\frac{2\omega\sin\pi\omega}{1-\omega^2}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin\pi\omega}{1-\omega^2}\sin\omega x\,d\omega}$$

Scanned by CamScanner

معادلات با مشتقات جزئی.

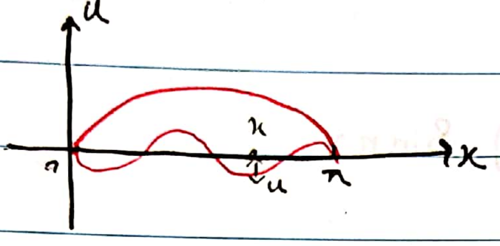
معادله موج یک بعدی:

PDE: $u_{tt} = 4u_{xx}$ — معادله با مشتقات جزئی

BC: $u(0,t) = 0 \, , \, u(\pi,t) = 0$ — شرایط مرزی

IC: $u(x,0) = \sin x \, ; \, u_t(x,0) = 0$ (سرعت اولیه) — شرایط اولیه

$0 < t < \infty \, , \, 0 < x < \pi$ *



مختصه مکان ← $u = u(x,t)$ → مختصه زمان

دامنه موج: ارتفاع

* مسئله در دامنه متناهی است (بازه).

در این حالت مسئله با استفاده از سری فوریه حل می شود.

فرض می کنیم که مسئله حل شده است و

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$L = \pi \Rightarrow$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx \rightarrow$$

چرا که x رو صفر بزاریم $u=0$

وقتی x رو π بزاریم $u=0$ } پس سازگار

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(t) \sin nx$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(t) \sin nx$$

یادآوری: $(\sin \alpha x)'' = -\alpha^2 \sin \alpha x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n''(t) \sin nx + 4 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(t) \sin nx = 0$$

$u_{tt} - 4u_{xx} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n''(t) + 4n^2 G_n(t) \right) \sin nx = 0$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow G_n''(t) + 4n^2 G_n(t) = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(ODE) معادله مرتبه ۲ و خطی با ضرایب ثابت — معادله دیفرانسیل همگن می باشد

$$\lambda^2 + 4n^2 = 0 \rightarrow \lambda^2 = -4n^2 \rightarrow \lambda = \pm 2in$$

معادله مشخصه (مفسر)

یادآوری:

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

$$\Rightarrow y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$$

$$\Rightarrow G_n(t) = A_n \cos 2nt + B_n \sin 2nt$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos 2nt + B_n \sin 2nt) \sin nx$$

با استفاده از شرایط اولیه $(u(x,0) = \sin x , u_t(x,0) = 0)$ ، A_n و B_n را بدست می آوریم.

$$\xrightarrow{t=0} \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx$$

مشتق بر حسب t

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-2nA_n \sin 2nt + 2nB_n \cos 2nt) \sin nx$$

$$\xrightarrow{t=0} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin nx$$

$$\Rightarrow 2nB_n = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

Scanned by CamScanner

مثال:

PDE: $U_{tt} - U_{xx} = 0$

BC: $U(0,t) = 0 \quad , U(1,t) = 0$

IC: $U(x,0) = x \quad U_t(x,0) = 0$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin n\pi x \qquad 0<x<1 \quad , 0<t<\infty$$

$$U_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(t) \sin n\pi x$$

$$U_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 G_n(t) \sin n\pi x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n''(t) \sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 G_n(t) \sin n\pi x = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n''(t) + n^2\pi^2 G_n(t) \right) \sin n\pi x = 0$$

$$G_n''(t) + n^2\pi^2 G_n(t) = 0 \qquad \lambda^2 + n^2\pi^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -n^2\pi^2$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

$$\boxed{\lambda = \pm i n\pi}$$

$$G_n(t) = A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t) \sin n\pi x$$

$$U(x,0) = x \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x \Rightarrow A_n = 2\int_0^1 x \sin n\pi x$$

t مساوی ۰ (برابر ۰)

$$U_t(x,0) = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi A_n \sin n\pi t + n\pi B_n \cos n\pi t) \sin n\pi x$$

$$\xrightarrow{t=0} \; 0 = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \sin n\pi x \rightarrow n\pi B_n = 0 \Rightarrow \boxed{B_n = 0}$$

Scanned by CamScanner

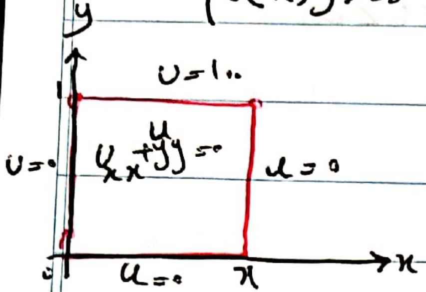
معادله لاپلاس در مستطیل:

PDE: $U_{xx} + U_{yy} = 0$

در مختصات مکانی yx

پتانسیل $U = U(x,y)$

BC: $\begin{cases} U(0,y) = 0 \\ U(\pi,y) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} U(x,0) = 0 \\ U(x,1) = 100 \end{cases}$



$0 < x < \pi \quad , \quad 0 < y < 1$

فرض می‌کنیم که U پیدا شده.

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(y) \sin nx$$

$$U_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(y) \sin nx$$

$$U_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(y) \sin nx$$

$$\xrightarrow[U_{xx}+U_{yy}=0]{\text{جایگذاری در معادله}} -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(y) \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(y) \sin nx = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n''(y) - n^2 G_n(y) \right) \sin nx = 0$$

$$G_n''(y) - n^2 G_n(y) = 0 \xrightarrow{\text{معادله درجه ۲}} \lambda^2 - n^2 = 0 \rightarrow \lambda^2 = n^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm n}$$

$$G_n(y) = A_n e^{ny} + B_n e^{-ny}$$

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{ny} + B_n e^{-ny} \right) \sin nx$$

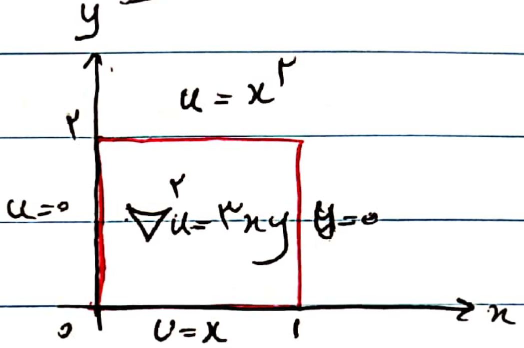
Scanned by CamScanner

$$y=0 \quad 0=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin nx \qquad \begin{cases} A_n+B_n=0 \\ A_n e^{n}+B_n e^{-n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}100\sin nx\,dx \end{cases}$$

$$y=1 \quad 100=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{n}+B_n e^{-n})\sin nx$$

مثال: مسئله زیر را حل کنید:

$$PDE: \; U_{xx}+U_{yy}=3xy$$



$$BC: \begin{cases} U(0,y)=0 \\ U(1,y)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U(x,0)=x \\ U(x,2)=x^2 \end{cases}$$

$$0<x<1 \;,\; 0<y<2 \qquad L=1 \qquad \nabla^2 u=U_{xx}+U_{yy}$$

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(y)\sin n\pi x$$

$$U_{xx}=-\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2 G_n(y)\sin n\pi x$$

$$U_{yy}=\sum_{n=1}^{\infty}G_n''(y)\sin n\pi x$$

جایگذاری در $U_{xx}+U_{yy}=3xy$:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}n^2\pi^2 G_n(y)\sin n\pi x+\sum_{n=1}^{\infty}G_n''(y)\sin n\pi x=3xy$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(G_n''(y)-n^2\pi^2 G_n(y)\right)\sin n\pi x=3xy$$

$$\Rightarrow G_n''(y)-n^2\pi^2 G_n(y)=\frac{2}{1}\int_0^1 3xy\sin n\pi x\,dx$$

$$G_n''(y)-n^2\pi^2 G_n(y)=y\int_0^1 6x\sin n\pi x\,dx=y\,H_n \quad \text{(عدد)}$$

$$G_n''(y)-n^2\pi^2 G_n(y)=H_n y$$

معادله ناهمگن است، نیز به جواب عمومی و خصوصی لازم است

Scanned by CamScanner

$$G_n''(y) - n^2\pi^2 G_n(y) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - n^2\pi^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \pm n\pi$$

$$G_n^{(h)}(y) = A_n e^{n\pi y} + B_n e^{-n\pi y} \quad , \quad G_n^{(p)}(y) = \alpha y + \beta$$

$$\Rightarrow \beta = 0 \ , \ \alpha = \frac{H_n}{n^2\pi^2} \Rightarrow G_n^{(p)}(y) = \frac{H_n}{n^2\pi^2} y$$

$$G_n(y) = A_n e^{n\pi y} + B_n e^{-n\pi y} + \frac{H_n}{n^2\pi^2} y$$

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{n\pi y} + B_n e^{-n\pi y} + \frac{H_n}{n^2\pi^2} y\right) \sin n\pi x$$

$$\begin{cases} y=0 & x = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin n\pi x \\ y=2 & x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{2n\pi} + B_n e^{-2n\pi} + \frac{2H_n}{n^2\pi^2}\right) \sin n\pi x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_n + B_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx \\ A_n e^{2n\pi} + B_n e^{-2n\pi} + \frac{2H_n}{n^2\pi^2} = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 \sin n\pi x \, dx \end{cases}$$

تمرین: مسئله را کامل کنید

PDE: $U_{xx} + U_{yy} = 0$

$$BC: \begin{cases} U(0,y) = 0 \\ U(\pi,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U(x,0) = 0 \\ U(x,\pi) = 2 \end{cases} \quad 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < \pi$$

$L = \pi$

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(y) \sin nx$$

$$U_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(y) \sin nx$$

$$U_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(y) \sin nx$$

Scanned by CamScanner

$$\rightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(y) \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(y) \sin nx = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n''(y) - n^2 G_n(y) \right) \sin nx = 0$$

$$G_n''(y) - n^2 G_n(y) = 0 \rightarrow \lambda^2 - n^2 = 0 \rightarrow \lambda^2 = n^2 \rightarrow \boxed{\lambda = \pm n}$$

$$G_n(y) = A_n e^{ny} + B_n e^{-ny}$$

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{ny} + B_n e^{-ny} \right) \sin nx$$

$$y=0 \left\{ 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin nx \right. \qquad \left\{ A_n + B_n = 0 \right.$$

$$y=\pi \left\{ 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} \right) \sin nx \right. \qquad \left\{ A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin nx \, dx \right.$$

$$B_n = -A_n$$

$$A_n e^{n\pi} - A_n e^{-n\pi} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx$$

$$A_n \left(e^{n\pi} - e^{-n\pi} \right) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx$$

Scanned by CamScanner

تمرین:

PDE: $U_{xx}+U_{yy}=0$

BC: $\begin{cases} U(0,y)=0 \\ U(\pi,y)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} U(x,0)=0 \\ U(x,\pi)=0 \end{cases}$ $0<x<\pi$, $0<y<\pi$

$L=\pi$

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(y)\sin nx$$

$$U_{xx}=-\sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(y)\sin nx$$

$$U_{yy}=\sum_{n=1}^{\infty} G_n''(y)\sin nx$$

جایگذاری $\longrightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(y)\sin nx+\sum_{n=1}^{\infty} G_n''(y)\sin nx=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(G_n''(y)-n^2 G_n(y)\right)\sin nx=0$$

$$\Rightarrow G_n''(y)-n^2G_n(y)=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 0\sin nx\,dx}_{H_n}$$

$G_n''(y)-n^2G_n(y)=0$ $\quad \lambda^2-n^2=0 \Rightarrow \lambda^2=n^2 \rightarrow \lambda=\pm n$

$G_n^{(h)}(y)=A_n e^{+ny}+B_n e^{-ny}$, $G_n^{(P)}(y)=\alpha y+\beta$

$\alpha=0$, $\beta=H_n$

$G_n^{(P)}(y)=H_n$

$$G_n(y)=A_n e^{ny}+B_n e^{-ny}+H_n$$

$y=0$: $0=A_n+B_n+H_n$

$y=\pi$: $0=A_n e^{n\pi}+B_n e^{-n\pi}+H_n$

معادله انتقال حرارت:

PDE: $U_t = 4U_{xx}$

$x =$ مکان

$t =$ زمان

$u =$ دما

BC: $U(0,t) = 0 \quad , \quad U(\pi,t) = 0$

IC: $U(x,0) = x \qquad 0 < x < \pi \quad , \quad 0 < t < \infty$

$L = \pi$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx$$

$$U_t = \sum_{n=1}^{\infty} G_n'(t) \sin nx$$

$$U_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(t) \sin nx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n'(t) \sin nx + 4\sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(t) \sin nx = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n'(t) + 4n^2 G_n(t)\right) \sin nx = 0$$

$$G_n'(t) + 4n^2 G_n(t) = 0 \xrightarrow{\text{جداکردن}} \frac{dG_n(t)}{dt} = -4n^2 G_n(t) \Rightarrow \frac{dG_n(t)}{G_n(t)} = -4n^2 dt$$

روش انتگرال گیری به طرفین و اضافه کردن ثابت

$$\Rightarrow \int \frac{dG_n(t)}{G_n(t)} = \int -4n^2 dt + \ln A_n$$

$$\ln G_n(t) = -4n^2 t + \ln A_n \Rightarrow \ln G_n(t) - \ln A_n = -4n^2 t$$

$$\xrightarrow{\text{خواص لگ}} \ln \frac{G_n(t)}{A_n} = -4n^2 t \Rightarrow \frac{G_n(t)}{A_n} = e^{-4n^2 t} \Rightarrow G_n(t) = A_n e^{-4n^2 t}$$

$\ln \frac{\alpha}{\beta} = \ln \alpha - \ln \beta$

$\ln \alpha = \beta \Rightarrow \alpha = e^{\beta}$

Scanned by CamScanner

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

شرط اولیه ($t=0$):

$$\Longrightarrow x=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \Rightarrow A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

مثال: معادله زیر را حل کنید:

PDE: $U_t = 4U_{xx}$

BC: $U(0,t)=0 \ , \ U(2,t)=0$

IC: $U(x,0)=x \qquad 0<x<2 \ , \ 0<t<\infty$

$L=2$

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$U_t=\sum_{n=1}^{\infty} G_n'(t) \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$U_{xx}=-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{4} G_n(t) \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} G_n'(t) \sin \frac{n\pi x}{2} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{4} G_n(t) \sin \frac{n\pi x}{2} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n'(t) + 4\frac{n^2\pi^2}{4} G_n(t) \right) \sin \frac{n\pi x}{2} = 0$$

$$G_n'(t) + 4\frac{n^2\pi^2}{4} G_n(t) = 0 \xrightarrow{\text{جداسازی}} \frac{dG_n(t)}{dt} = -\frac{4n^2\pi^2}{4} G_n(t)$$

$$\int \frac{dG_n(t)}{G_n(t)} = -\int \frac{4n^2\pi^2}{4} dt + \ln A_n \Rightarrow \ln G_n(t) = -n^2\pi^2 t + \ln A_n$$

ELMA

Scanned by CamScanner

$$\ln \frac{G_n(t)}{A_n} = -n^2\pi^2 t \to \frac{G_n(t)}{A_n} = e^{-n^2\pi^2 t} \to G_n(t) = A_n e^{-n^2\pi^2 t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$\overset{t=0}{\Longrightarrow} x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{2} \Rightarrow A_n = \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx$$

مثال ۲: معادله انتقال حرارت زیر را حل کنید:

PDE: $u_t - 4u_{xx} = 100$

BC: $u(0,t) = 0 , u(\pi,t) = 0$

IC: $u(x,0) = x \qquad 0<x<\pi \;,\; 0<t<\infty$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin nx$$

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} G_n'(t) \sin nx \quad , \quad u_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(t) \sin nx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n'(t) \sin nx + 4\sum_{n=1}^{\infty} n^2 G_n(t) \sin nx = 100$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n'(t) + 4n^2 G_n(t) \right) \sin nx = 100$$

$$G_n'(t) + 4n^2 G_n(t) = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 100 \sin nx\, dx}_{H_n}$$

یادآوری:

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x) \\ \mu = e^{\int P(x)dx} \end{cases}$$

$$u'v + uv' = (uv)'$$

$$\to \mu = e^{\int 4n^2 dt} = e^{4n^2 t}$$

$$e^{4n^2t} G_n'(t) + 4n^2 e^{4n^2 t} G_n(t) = H_n e^{4n^2 t}$$

$$\left(e^{4n^2t} G_n(t)\right)' = H_n e^{4n^2 t} \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{انتگرال}} e^{4n^2t} G_n(t) = \int H_n e^{4n^2 t}\, dt + A_n$$

* (انتگرال مشتق ، می‌شه خودش تابع)

OLMA

Scanned by CamScanner

$$e^{4n^2t}G_n(t) = \frac{H_n}{4n^2}e^{4n^2t} + A_n \Rightarrow G_n(t) = \frac{H_n}{4n^2} + A_n e^{-4n^2t}$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n}{4n^2} + A_n e^{-4n^2t}\right)\sin nx$$

$t=0$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n}{4n^2} + A_n\right)\sin nx$$

$$A_n + \frac{H_n}{4n^2} = 0 \rightarrow A_n = -\frac{H_n}{4n^2}$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{4n^2}\left(1 - e^{-4n^2t}\right)\sin nx$$

معادله با مشتقات جزئی در بازه $(0,\infty)$

$U = U(x,t)$

PDE: $U_t - 4U_{xx} = 0$

BC: $U(0,t) = 0$

IC: $U(x,0) = e^{-2x}$ $\quad 0 < x < \infty \quad , \quad 0 < t < \infty$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\, d\omega$$

$$B(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx$$

$$U(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} G(t,\omega)\sin\omega x\, d\omega$$

$$G(t,\omega) = 2\int_0^{\infty} u(x,t)\sin\omega x\, dx$$

Scanned by CamScanner

$$U_t = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial G(t,w)}{\partial t} \sin wx \, dw$$

$$U_{xx} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty w^2 G(t,w) \sin wx \, dw$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial G(t,w)}{\partial t} \sin wx \, dw + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty w^2 G(t,w) \sin wx \, dw = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\partial G(t,w)}{\partial t} + 4w^2 G(t,w)\right) \sin wx \, dw = 0$$

$$\frac{\partial G(t,w)}{\partial t} + 4w^2 G(t,w) = 0 \xrightarrow[\text{شد}]{\text{معادله جبری}} \frac{\partial G(t,w)}{\partial t} = -4w^2 G(t,w)$$

$$\frac{\partial G(t,w)}{G(t,w)} = -4w^2 \partial t \xrightarrow[\text{نسبت به } t]{\text{انتگرال}} \ln G(t,w) = -4w^2 t + \ln A$$

$$\rightarrow \ln G(t,w) - \ln A = -4w^2 t \rightarrow \ln \frac{G(t,w)}{A} = -4w^2 t$$

$$\ln\alpha = \beta,\ \alpha = e^\beta \rightarrow \frac{G(t,w)}{A} = e^{-4w^2 t} \Rightarrow G(t,w) = A e^{-4w^2 t} \overset{t=0}{\Rightarrow} G(0,w) = A$$

$$\xrightarrow[G(t,w)]{\text{معادله صفر تبدیل}} G(0,w) = 2\int_0^\infty u(x,0) \sin wx \, dx$$

$$\rightarrow G(0,w) = 2\int_0^\infty e^{-2x} \sin wx \, dx \xrightarrow[\text{لاپلاس}]{\text{تبدیل}} G(0,w) = 2\,\frac{w}{2^2+w^2}$$

$$G(t,w) = \frac{2w}{4+w^2} e^{-4w^2 t}$$

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w}{4+w^2} e^{-4w^2 t} \sin wx \, dw$$

Scanned by CamScanner

مثال: برای تابع مجهول $u(x,t)$:

PDE: $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$

BC: $u(0,t) = 0$

IC: $\begin{cases} u(x,0) = e^{-5x} & \text{شکل اولیه} \\ u_t(x,0) = 0 & \text{سرعت اولیه} \end{cases}$ $\quad 0<x<\infty \quad , \quad 0<t<\infty$

$$\begin{cases} G(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G(t,\omega)\sin\omega x\, d\omega \\ G(t,\omega) = 2\int_0^\infty u(x,t)\sin\omega x\, dx \end{cases}$$

$$u_{tt} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial^2 G(t,\omega)}{\partial t^2}\sin\omega x\, d\omega$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \omega^2 G(t,\omega)\sin\omega x\, d\omega$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial^2 G(t,\omega)}{\partial t^2}\sin\omega x\, d\omega + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \omega^2 G(t,\omega)\sin\omega x\, d\omega = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 G(t,\omega)}{\partial t^2} + 4\omega^2 G(t,\omega)\right)\sin\omega x\, d\omega = 0$$

$$\frac{\partial^2 G(t,\omega)}{\partial t^2} + 4\omega^2 G(t,\omega) = 0 \xrightarrow[\text{درجه ۲}]{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2 + 4\omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -4\omega^2 \rightarrow \lambda = \pm 2\omega i$$

ریشه‌ها مختلط

★ $G(t,\omega) = A\cos 2\omega t + B\sin 2\omega t$

$t=0 \rightarrow G(0,\omega) = A$

$$A = G(0,\omega) = 2\int_0^\infty u(x,0)\sin\omega x\, dx = 2\int_0^\infty e^{-5x}\sin\omega x\, dx = 2\frac{\omega}{25+\omega^2}$$

برای بدست آوردن B از معادله ★ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial G(t,w)}{\partial t} = -2wA\sin 2wt + 2wB\cos 2wt \xrightarrow{t=0} G_t(0,w) = 2wB$$

$$G_t(0,w) = 2\int_0^\infty u_t(x,0)\sin wx\,dx = 0$$

$$\Rightarrow G_t(0,w) = 2wB \Rightarrow B = \frac{G_t(0,w)}{2w} = 0 \Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$G(t,w) = \frac{2w}{25+w^2}\cos 2wt$$

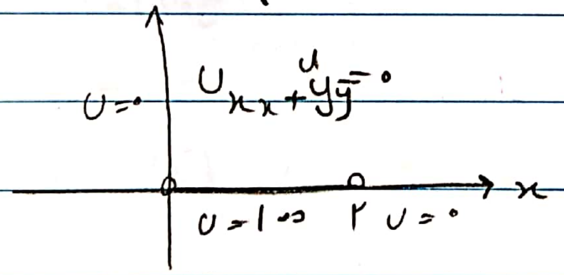
$$\boxed{u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w}{25+w^2}\cos 2wt\,\sin wx\,dw}$$

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید:

PDE: $u_{xx}+u_{yy}=0$

BC: $u(0,y)=0$

$$u(x,0)=\begin{cases}100, & 0<x<2\\ 0, & x>2\end{cases} \qquad 0<x<\infty, \quad 0<y<\infty$$



$$\begin{cases} u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G(y,w)\sin wx\,dx \\ U(y,w) = 2\int_0^\infty u(x,y)\sin wx\,dx \end{cases}$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty w^2 G(y,w)\sin wx\,dx$$

$$u_{yy} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial^2 G(y,w)}{\partial y^2}\sin wx\,dx$$

Scanned by CamScanner

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \omega^2 G(y,\omega)\sin\omega x\,d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial^2 G(y,\omega)}{\partial y^2}\sin\omega x\,d\omega = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 G(y,\omega)}{\partial y^2} - \omega^2 G(y,\omega)\right)\sin\omega x\,d\omega = 0$$

$$\frac{\partial^2 G(y,\omega)}{\partial y^2} - \omega^2 G(y,\omega) = 0 \rightarrow \lambda^2 - \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda^2 = \omega^2$$

$$\boxed{\lambda = \pm\omega}$$

$$*\ G(y,\omega) = Ae^{\omega y} + Be^{-\omega y}$$

$y = 0$

$$\Rightarrow G(0,\omega) = A + B$$

$$G(0,\omega) = 2\int_0^\infty u(x,0)\sin\omega x\,dx = 2\int_0^2 100\sin\omega x\,dx + \int_2^\infty 0\sin\omega x\,dx$$

$$= 200\left[-\frac{\cos\omega x}{\omega}\right]_0^2 = 200\,\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}$$

تفسیر: $\lim_{\omega\to\infty} G(y,\omega) = 0$

طرفین ضرب $\Rightarrow$ اول میتونیم $e^{-\omega y}G(y,\omega) = A + Be^{-2\omega y}$

ازمعادله * حد بی نهایت

وقتی حد بی نهایت

$$\Rightarrow \boxed{A = 0} \rightarrow \boxed{B = 200\,\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}}$$

$$\Rightarrow G(y,\omega) = 200\,\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}\,e^{-\omega y}$$

$$\boxed{U(x,y) = \frac{200}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos 2\omega}{\omega^2}\,e^{-\omega y}\sin\omega x\,d\omega}$$

Scanned by CamScanner

اعداد مختلط:

هر عدد به صورت $z = x + iy$ را یک عدد مختلط می‌نامند.

$x = Re(z)$ قسمت حقیقی ، $y = Im(z)$ قسمت موهومی

$(i = \sqrt{-1})$ $i^2 = -1$, $x, y \in (-\infty, \infty)$

مثال: ریشه‌های معادله را بیابید:

$$z^2 - 2z + 10 = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = 1 \pm 3i$$

$z_1 = 1 + 3i$

$z_2 = 1 - 3i$

اعمال جمع و ضرب:

- $(x + iy) + (x_1 + iy_1) = (x + x_1) + i(y + y_1)$
- $(x + iy) \times (x_1 + iy_1) = (xx_1 - yy_1) + i(xy_1 + yx_1)$

مثال:

1. $(-2 + 3i) + (5 - 4i) = 3 - i$
2. $(2 + 4i) \times (-1 + 5i) = (-2 - 20) + i(-4 + 10) = -22 + 6i$

نکته: مزدوج عدد $z = x + iy$ عبارت است از $\bar{z} = x - iy$.

قدر مطلق عدد $z = x + iy$ عبارت است از $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Scanned by CamScanner

خواص اعداد مختلط:

$Z = x + iy$

1. $Z + \bar{Z} = 2\,Re(Z)$
2. $Z - \bar{Z} = 2i\,Im(Z)$
3. $|Z| = |\bar{Z}|$
4. $Z\bar{Z} = |Z|^2$
5. $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$
6. $\overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2$
7. $|Z_1 Z_2| = |Z_1||Z_2|$
8. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$
9. $|Z_1 \mp Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$
10. $\bar{\bar{Z}} = Z$
11. $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$

مثال: مطلوبست $Z = x + iy$ در شرط‌ها صدق کنند، Z را بیابید:

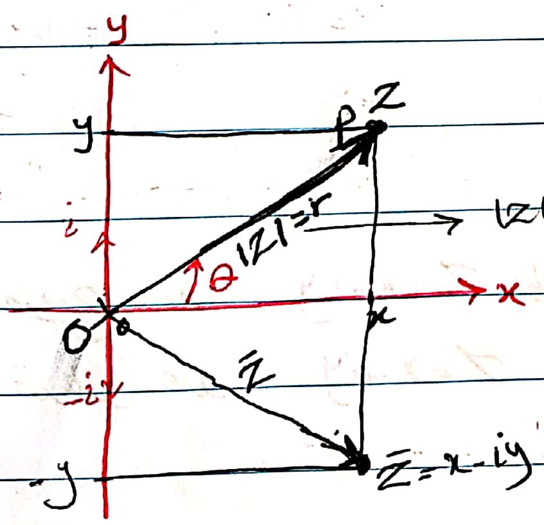
$$\begin{cases} Re(z) = 2\,Im(Z) \\ Z^2 - \bar{Z}^2 = 8i \Rightarrow (Z+\bar{Z})(Z-\bar{Z}) = 8i \end{cases}$$

با توجه به قضایای بالا ⟸

$$\begin{cases} x = 2y \\ 2x\,(2iy) = 8i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \xrightarrow{y=\pm 1} \boxed{x = \pm 2} \\ xy = 2 \xrightarrow{x=2y} 2yy = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} Z_1 = 2 + i \\ Z_2 = -2 - i \end{cases}$$

نمایش اعداد مختلط در صفحه:



$Z = x + iy$

$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow$ قضیه فیثاغورث

نمایش قطبی اعداد مختلط:

فرض کنید θ زاویه بین بردار $\vec{OP}$ و محور xها مثبت باشد، داریم:

$r=|z|=|\vec{OP}|$, $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$, $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{cases}$

$$z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$$ ← فرمول اویلر

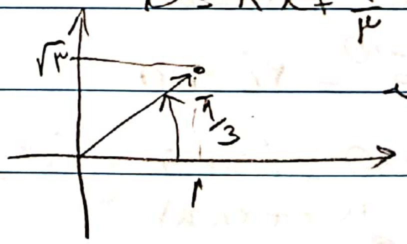
$$z=re^{i\theta}$$ نمایش قطبی z

$|z|$ قدرمطلق z ، θ آرگومان (شناسه) $=\arg(z)$

مثال: عدد $z=1+i\sqrt{3}$ را به صورت قطبی بنویسید.

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

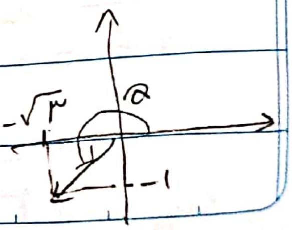
$z=2e^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow$ $\theta=k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow k=0$



نقطه در ربع اول می‌باشد، k=0 می‌شود

مثال: عدد $z=-\sqrt{3}-i$ را به صورت قطبی بنویسید.

$r=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$

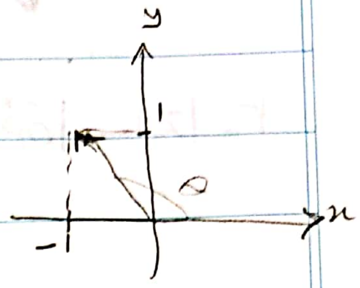


$z=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $\theta=k\pi+\frac{\pi}{6}\overset{k=1}{=}\frac{7\pi}{6}$

چون زاویه از π بیشتر است $k=1$

Scanned by CamScanner

مثال: عدد $z=-1+i$ را به صورت قطبی بنویسید:



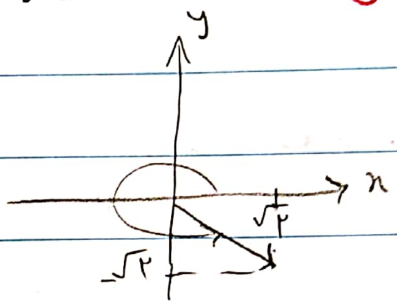
$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\tan\theta=\frac{1}{-1}=-1 \Rightarrow \tan\theta=-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta=k\pi-\frac{\pi}{4}$

$k=1$

$z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

مثال: عدد $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ را به صورت قطبی بنویسید:



$r=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$

$\tan\theta=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1 \Rightarrow \tan -\frac{\pi}{4}$

$\theta=k\pi-\frac{\pi}{4} \rightarrow k=2 \Rightarrow 2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

$z=2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

خواص نمایش قطبی:

(۱ $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

(۲ $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$

(۳ $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$

(۴ $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

(۵ $e^{i\theta}=e^{i(\theta+2n\pi)}$

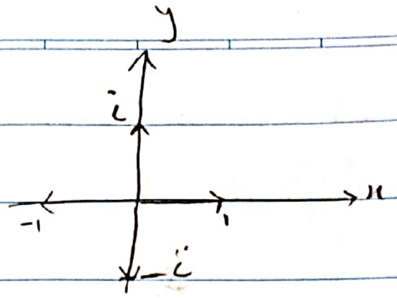
ریشه:

$z=x+iy=re^{i\theta}$ ، n عدد طبیعی ، مطلوبست $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\theta}}$

$$w_k=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

$k=0,1,2,\dots,n-1$

Scanned by CamScanner



مثال: مطلوبست $\sqrt[4]{1}$

$z=1 \quad , \quad r=|1|=1 \quad , \quad \theta=0 \rightarrow 1=1e^{i\theta}$

$\omega_k=\sqrt[4]{1}\; e^{i\frac{0+2k\pi}{4}}$ $\quad k=0,1,2,3,$

$\omega_0=1$

$\omega_1=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

$\omega_2=e^{i\pi}=-1$

$\omega_3=e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$

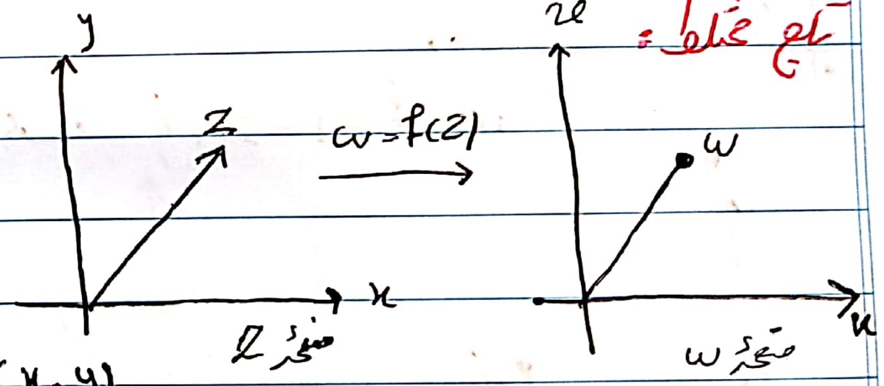
تابع مختلط:

$w=f(z)$

$z=x+iy$

$w=u+iv$

$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$



مثال:

$W=f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$

$$\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}$$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

مثال:

$$w=f(z)=z^3=(x+iy)^3=x^3+3x^2iy+3xi^2y^2+i^3y^3$$

$$=x^3+3x^2iy-3xy^2-iy^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$$

$i^1=i$

$i^2=-1$

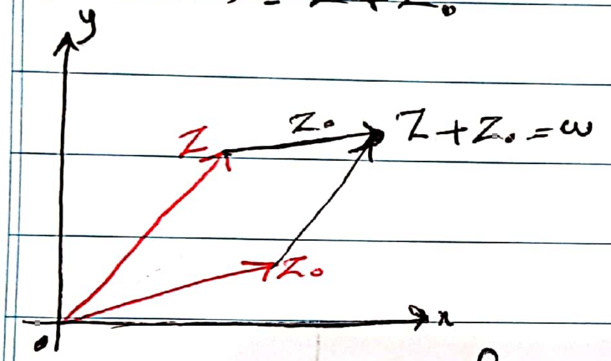
$i^3=-i$

$i^4=1$

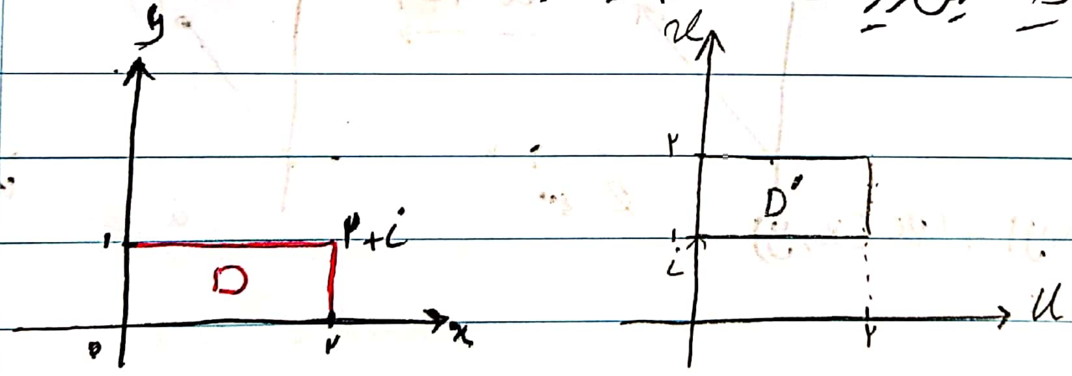
$$\begin{cases} u=x^3-3xy^2 \\ v=3x^2y-y^3 \end{cases}$$

انتقال به اندازه بردار z_0:

$$w=f(z)=z+z_0$$



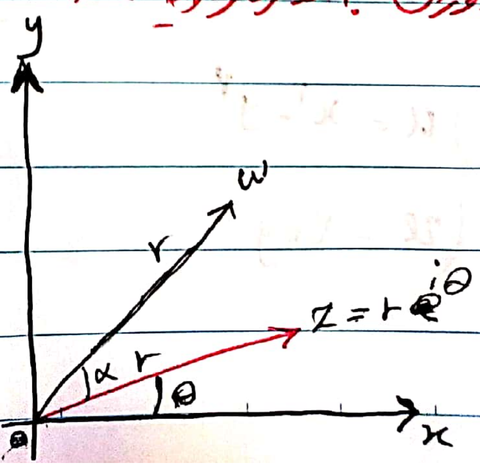
مثال: مطلوبست تصویر مستطیل زیر تحت $w=f(z)=z+i$:



دوران به اندازه زاویه α:

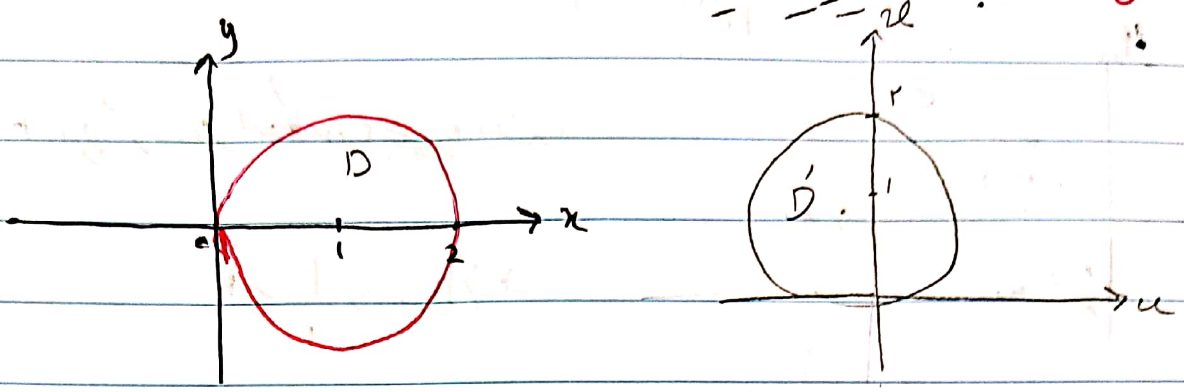
$$w=f(z)=e^{i\alpha}z$$

$$=e^{i\alpha}re^{i\theta}=re^{i(\alpha+\theta)}$$



Scanned by CamScanner

مثال: مطلوبست تصویر ناحیه D زیر تحت $w=f(z)=iz$



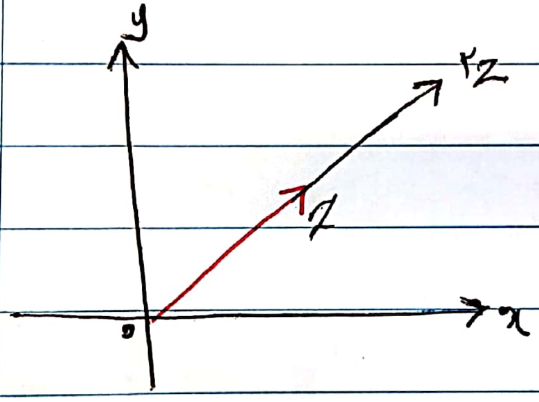
$|i|=1 \,, \quad \theta=\frac{\pi}{2}$

$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

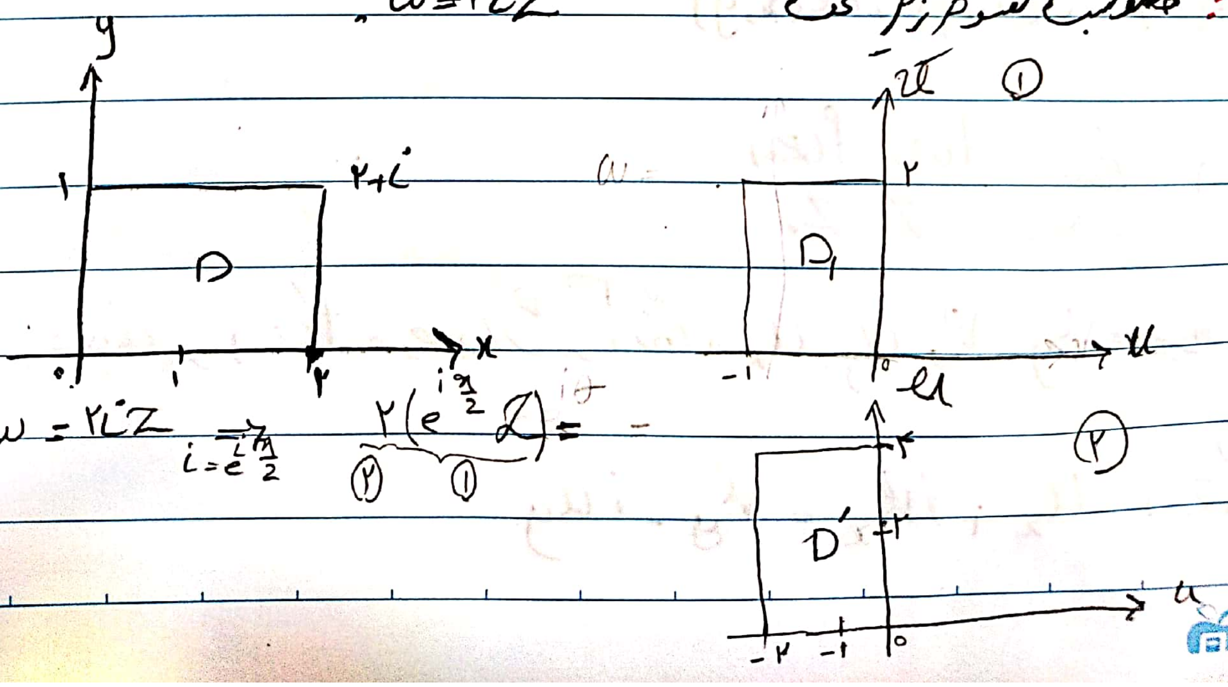
$\Rightarrow f(z)=e^{i\frac{\pi}{2}}z$

انبساط (انقباض):

$w=f(z)=2z$



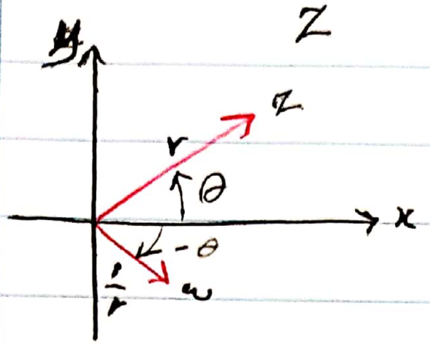
مثال: مطلوبست تصویر D زیر تحت $w=2iz$



$w=2iz \xrightarrow{i=e^{i\frac{\pi}{2}}} \underbrace{2}_{(2)}(\underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}z}_{(1)})=$

انعکاس: در این $r>1$

$$w=f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$$



نکته: بشکل به ۲ دایره که در عمل انعکاس چجوره باشد:

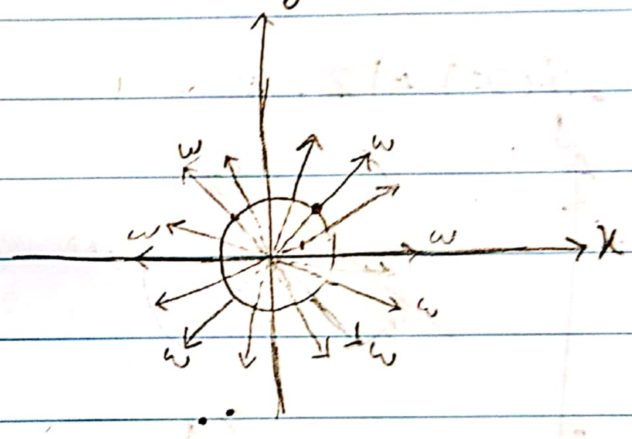
$$r>1 \Rightarrow \frac{1}{r}<1$$

$$r<1 \Rightarrow \frac{1}{r}>1$$

مثال: میدان $w=f(z)=\frac{2}{\bar{z}}$ را رسم کنید:

$$z=re^{i\theta}$$

$$w=\frac{2}{\overline{re^{i\theta}}}=\frac{2}{re^{-i\theta}}=\frac{2}{r}e^{i\theta}$$



در اصطلاح به این میدان "منبع" می‌گویند.

مشتق:

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

تعریف: چنانچه $f'(z_0)$ موجود باشد آنگاه u_x, u_y, v_x, v_y موجودند و

$$f'(z_0)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$$

نتیجه: اگر $f'(z)$ موجود باشد، معادلات کوشی - ریمان:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

مثال:

$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

(مشتق این را نسبت به x — مشتق این را نسبت به x)

مطلوبست: $f'(z)$

$f'(z) = 2z = 2x + 2iy$

مثال:

$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$

مشتق گیری f از فرمول لازم استفاده کردیم
$f'(z) = u_x + i v_x$

$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$

مشتق این تابع هم خودش چون تابع نمایی بوده.

مثال:

$w = f(z) = z^3$

مطلوبست: $f'(z)$

روش اول: $f'(z) = 3z^2 =$

روش دوم: $f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$

$f'(z) = (3x^2 - 3y^2) + i(6xy)$

Scanned by CamScanner

هیپربولیک

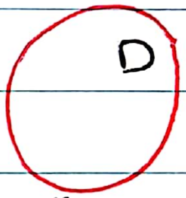
مثال: $f(z)=\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

یادآوری: $\begin{cases}\cosh y=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}\\ \sinh y=\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\end{cases}$ مطلوبست $f'(z)$ ؟

$f'(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y=\cos z$

تابع همساز (هارمونیک):

تابع $H(x,y)$ را در ناحیه D همساز نامند در صورتیکه $H_{xx}+H_{yy}=0$



قضیه: اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در همه نقاط D دارای مشتق باشد، آنگاه $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در D همساز می‌باشند.

مثال: $w=f(z)=z^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$

در همه نقاط $f(z)$ مشتق موجود است پس $u=x^3-3xy^2$ ، $v=3x^2y-y^3$ همساز می‌باشند.

اثبات:

$u_{xx}+u_{yy}=0$ $6x-6x=0$ ✓

$u_{xx}=(3x^2-3y^2)'=6x$

$u_{yy}=(-6xy)'=-6x$

Scanned by CamScanner

مثال: نشان دهید که $u(x,y) = \sin x \cosh y$ جواب معادله لاپلاس است: (یا هارمونیک)

$u(x,y) = \sin x \cosh y$

قسمت حقیقی تابع $\sin x$ در تحلیلی است
پس هارمونیک

or اثبات: ⇐ $u_x = \cos x \cosh y$ $\quad u_y = \sin x \sinh y$

از راه حل ⇐ $u_{xx} = -\sin x \cosh y$ $\quad u_{yy} = \sin x \cosh y$ $\quad$ (F.U: $u_{xx} + u_{yy} = 0$)

ثابت شد $\quad u_{xx} + u_{yy} = -\sin x \cosh y + \sin x \cosh y = 0$

تعریف: تابع $v(x,y)$ را مزدوج همساز $u(x,y)$ گویند هر گاه:

۱. u و v همساز باشند.

۲. $u_y = -v_x$ و $u_x = v_y$ باشد. (در واقع در معادله کوشی-ریمان صدق کنند)

قضیه: اگر $f(z) = u + iv$ در ناحیه D دارای مشتق باشد آنگاه v مزدوج همساز u می‌باشد.

روش محاسبه مزدوج همساز:

فرض کنید $u(x,y)$ معلوم است، مطلوبست مزدوج همساز آن $(v(x,y))$ را بیابید.

با استفاده از عبارت ۲ مختلط

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -u_y \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = u_x \end{cases} \xRightarrow{\text{بنابر}} \begin{cases} v = \int -u_y(x,y)\,dx \\ v = \int u_x(x,y)\,dy \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \int -u_y(x,y)\,dx + \int u_x(x,y)\,dy$$

جملات تکراری را یکبار بنویسید:

مثال: مزدوج همساز $u(x,y) = x^2 - y^2 + 4x$ را بیابید:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -u_y = 2y \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = u_x = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \int 2y\,dx = 2yx \\ v = \int (2x+4)\,dy = 2xy + 4y \end{cases}$$

← جملات تکراری را یکبار می‌نویسیم.

$$v(x,y) = 2xy + 4y + c$$

$$f(z) = u + iv = \underbrace{x^2 - y^2 + i(2xy)}_{z^2} + \underbrace{4x + i\,4y}_{z} + ic$$

$$f(z) = z^2 + 4z + ic$$

مثال: مطلوبست تابع مزدوج همساز $u(x,y) = \sin x \cosh y + 2xy$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -u_y = -\sin x \sinh y + 2x \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = u_x = \cos x \cosh y + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \int (-\sin x \sinh y + 2x)\, dx \\[2ex] v = \int (\cos x \cosh y + 2y)\, dy \end{cases}$$

Scanned by CamScanner